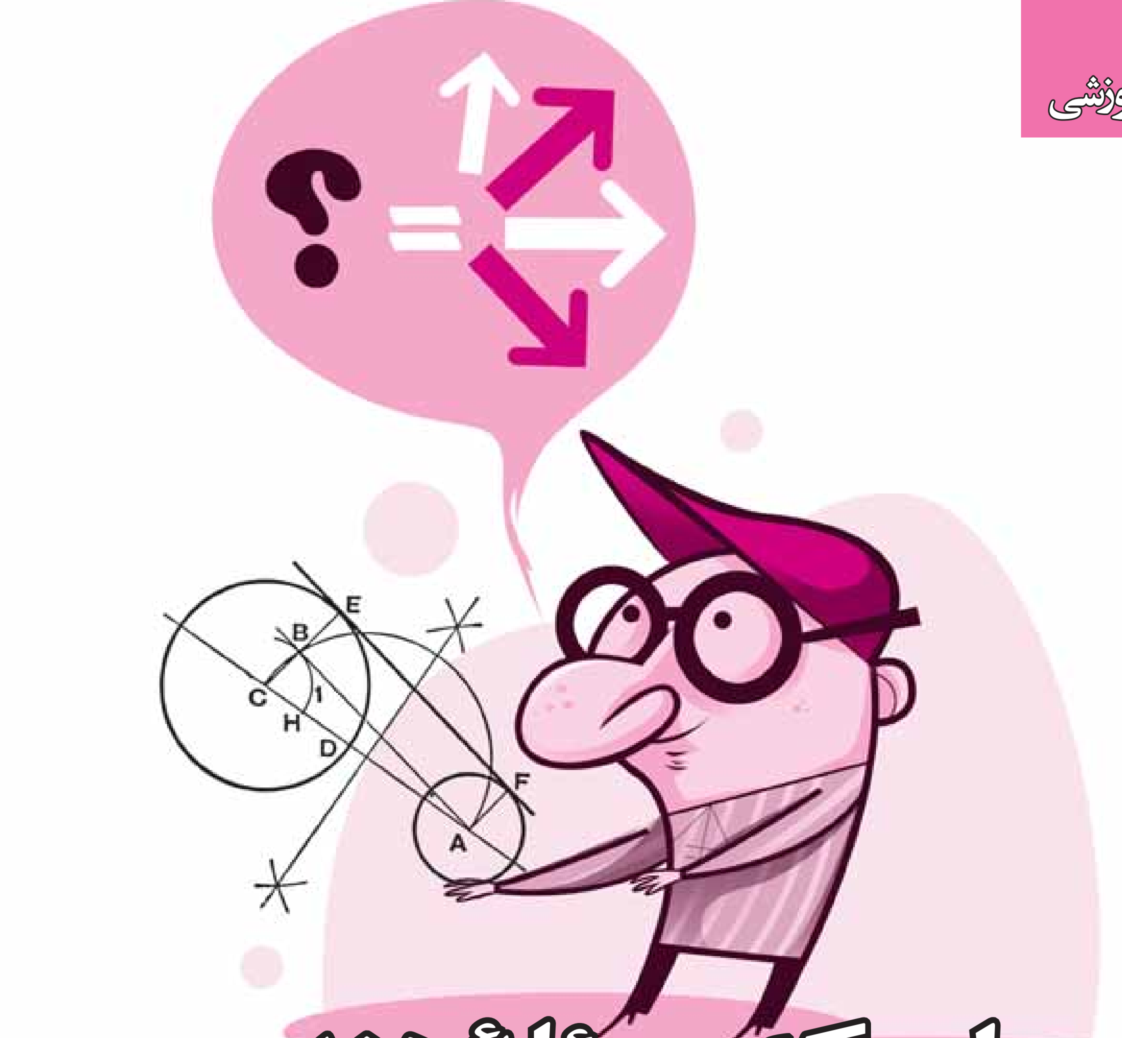


حل یک مسئلهٔ هندسی با چند راه حل

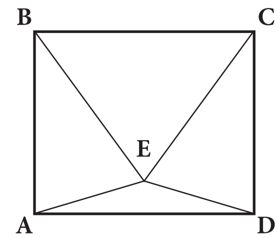
محمدکریم نائل*
دانشگاه آزاد اسلامی
واحد آبادان

کلیدواژه‌ها: حل مسئله، یادگیری ریاضی، مسئلهٔ هندسه

مقدمه

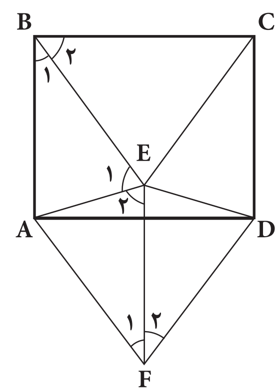
یکی از ابزارهای یادگیری ریاضی حل مسئله است. در ریاضیات مسئله و حل آن از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است (پولیا، ۱۳۸۵). مسئله‌ها قلب ریاضی هستند و حل مسئله قلب یادگیری ریاضی است (بیگدلی، ۱۳۸۷: ۶۱-۵۸). مسئله حل کردن همچون خلاقیتِ هنری است. آشنایی با روش‌های متفاوت حل یک مسئله می‌تواند روش آموزشی مناسبی باشد. بعضی از ریاضی‌دان‌ها هدف اصلی آموزش ریاضی را توسعهٔ قدرت ریاضی دانش‌آموزان در کشف کردن، حدسیه‌سازی و استدلال منطقی، به اضافهٔ توانایی استفادهٔ مؤثر از روش‌های گوناگون ریاضی برای حل مسئله می‌دانند (مکینتاش، ۱۳۹۱: ۲۱-۳). به کمک مسئله می‌توان فکر خود را تنظیم کرد و موضوع مشخصی را مدنظر قرار داد. این کار باعث می‌شود، ریزه‌کاری‌های ریاضی را به‌طور عمیق‌تر درک کنیم. لذا حل یک مسئله به روش‌های غیرمتعارف می‌تواند در یادگیری ریاضی مثمرثمر باشد. در ادامه مسئله‌ای می‌آید که با روش‌ها و ابزارهای متفاوت قابل حل است و چند راه ابتکاری برای حل آن ارائه شده که می‌تواند جنبهٔ آموزشی داشته باشد.

صـورت مسـئله: در مربـع ABCD دو زاویـۀ ۱۵ درجه روی ضلع AD به داخل مربع رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه E قطع کنند. سـپس نقطهٔ E را بـه دو رأس دیگر مربع، یعنی B و C وصل می‌کنیم. ثابـت کنیـد مثلث EBC متسـاوی‌الاضلاع اسـت (شکل ۱).



شکل ۱

- **راه‌حـل اول** با توجه به فرضیات مسـئله به راحتی می‌تـوان نتیجه گرفت که دو مثلث EAB و EDC به حالت «ض‌زض» همنهشت هستند. در نتیجه، مثلث EBC متساوی‌الساقین اسـت. روی ضلع AD مثلث متسـاوی‌الاضلاع AFD را بنا و از نقطهٔ F به نقطهٔ E وصل می‌کنیم (شکل ۲).



شکل ۲

به‌راحتی دیده می‌شود که دو مثلث ABE و FAE به حالت «ض‌زض» با یکدیگر همنهشتند:

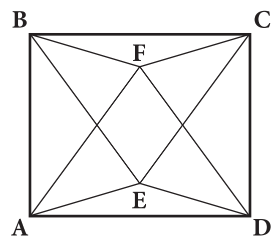
$AB = FA,\ F\hat{A}E = E\hat{A}B = ۷۵^\circ,\ AE = AE$

در نتیجـه $\hat{F}_۱ = \hat{B}_۱$ و $\hat{E}_۱ = \hat{E}_۲$، از طـرف دیگـر دو مثلـث EFD و EFA به حالت سـه ضلـع با یکدیگر همنهشتند و داریم:

$\hat{E}_۱ = \hat{E}_۲ = ۷۵^\circ,\ \hat{F}_۱ = \hat{F}_۲ = ۳۰^\circ$

در نتیجه $\hat{B}_۱ = ۳۰$ و $\hat{B}_۲ = ۶۰$ و ثابت می‌شـود که مثلث EBC متساوی‌الاضلاع است.

- **راه‌حل دوم** با توجه به فرضیات مسـئله به‌راحتی می‌توان نتیجه گرفت که دو مثلث EAB و EDC به حالت «ض‌زض» همنهشت هستند. در نتیجه، مثلث EBC همچون مثلث EAD متساوی‌السـاقین است (EB=EC). روی ضلع AD مثلث متسـاوی‌الاضلاع AFD را بـه سـمت داخل بنا و از نقطـهٔ F به نقاط B و C وصـل می‌کنیم تا مثلث FAD به‌دسـت آید (شکل ۳).



شکل ۳

به‌راحتی دیده می‌شود که: $C\hat{D}F = F\hat{A}B = ۳۰^\circ$، $D\hat{F}C = D\hat{C}F = ۷۵^\circ$، $A\hat{F}B = A\hat{B}F = ۷۵^\circ$ و دو مثلـث DCF و ABF به حالت «ض‌زض» همنهشـتند؛ زیرا:

$$\left.\begin{array}{r} AB = DC \\ AF = DF \\ B\hat{A}F = C\hat{D}F = ۳۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABF \cong \Delta DCF$$

در نتیجـه: CF=FB و دو مثلـث FBC و AED به حالت «ض‌زض» همنهشتند. پس: BF=AE

$$\left.\begin{array}{r} AB = AB \\ F\hat{B}A = E\hat{A}B = ۷۵^\circ \\ AE = BF \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABF \cong \Delta BAE$$

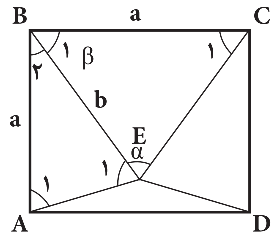
در نتیجه AF=BE. یعنی ثابت می‌شـود که مثلث EBC متساوی‌الاضلاع است.

به کمک مسئله می‌توان فکر خود را تنظیم کرد و موضوع مشخصی را مدنظر قرار داد. این کار باعث می‌شود ریزه‌کاری‌های ریاضی را به‌طور عمیق‌تر درک کنیم

- **راه‌حل سـوم** با توجه به فرضیات مسئله به‌راحتی می‌توان نتیجه گرفت که دو مثلث EAB و EDC به حالت «ض‌زض» همنهشت هستند. در نتیجه مثلث EBC همچون مثلث EAD متساوی‌الساقین است.

اکنون فرض کنید AB=a، $B\hat{E}C = \alpha$، CE=BE=b و $\hat{B}_۱ = \hat{C}_۱ = \beta$ (شکل ۴). در نتیجه:

$$۲\beta + \alpha = \pi \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{۲} - \frac{\alpha}{۲}$$



شکل ۴

با توجه به رابطهٔ سینوس‌ها در مثلث BCE داریم:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})}=\frac{b}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}=2\sin\frac{\alpha}{2} \qquad (1)$$

در مثلـث ABE داریـم: $\hat{B}_2=\frac{\alpha}{2}$، $\hat{A}_1=\frac{5\pi}{12}$ و $\hat{E}_1=\frac{7\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}$. با توجه به رابطهٔ سـینوس‌ها در مثلث ADE داریم:

$$\frac{a}{\sin(\frac{7\pi}{12}-\frac{\alpha}{2})}=\frac{b}{\sin(\frac{5\pi}{12})}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\sin(\frac{7\pi}{12}-\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{5\pi}{12})} \qquad (2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin(\frac{7\pi}{12}-\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{5\pi}{12})}$$

در نتیجه داریم:

$$\sin(\frac{\alpha}{2}).\sin(\frac{5\pi}{12})=\frac{1}{2}\sin(\frac{7\pi}{12}-\frac{\alpha}{2})$$
$$=\sin\frac{\pi}{6}.\sin(\frac{7\pi}{12}-\frac{\alpha}{2})$$

با تبدیل حاصل‌ضرب سینوس دو کمان به کسینوس داریم:

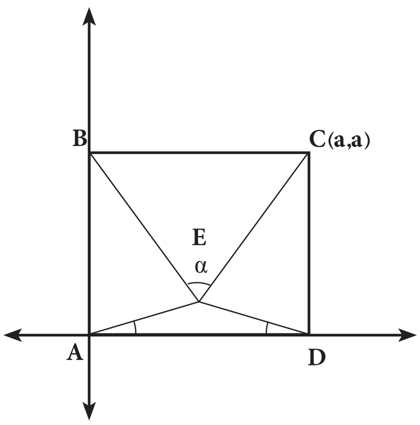
$$\cos(\frac{\alpha}{2}-\frac{5\pi}{12})-\cos(\frac{\alpha}{2}+\frac{5\pi}{12})$$
$$=\cos(-\frac{5\pi}{12}+\frac{\alpha}{2})-\cos(\frac{9\pi}{12}-\frac{\alpha}{2})$$

در نتیجه داریم:

$$\cos(\frac{\alpha}{2}+\frac{5\pi}{12})=\cos(\frac{9\pi}{12}-\frac{\alpha}{2})$$
$$\Rightarrow\frac{\alpha}{2}+\frac{5\pi}{12}=\frac{9\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}$$

و $\alpha=\frac{\pi}{3}$ و بنابرایـن حکـم ثابـت و مثلث EBC متساوی‌الاضلاع است.

● **راه‌حل چهارم** روی صفحهٔ مختصات دکارتی مربع را به مختصات‌های زیر رسم می‌کنیم:
$A(0,0)$، $B(0,a)$، $C(a,a)$ و $D(a,0)$ (شکل ۵).



شکل۵

مختصات نقطهٔ E برابر اسـت با: $E(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\tan 15)$. زیرا معادلهٔ خط AE برابر $y=(\tan 15)x$ است. معادلهٔ خط EC برابر است با:

$$y=(2-\tan 15)x+(\tan 15-a)$$

به‌همین ترتیب معادلهٔ خط EB برابر است با:

$$y=(\tan 15-2)x$$

زاویهٔ بین دو خط EB و EC برابر است با:

$$\tan\alpha=\left|\frac{(2-\tan 15)-(\tan 15-2)}{1+(2-\tan 15)(\tan 15-2)}\right|$$
$$=\left|\frac{4-2\tan 15}{4\tan 15-\tan^2 15-3}\right|$$

از طرف دیگر $\tan 15=2-\sqrt{3}$، در نتیجه:

$$\tan\alpha=\left|\frac{۴-۴+۲\sqrt{۳}}{۸-۴\sqrt{۳}-۴-۳+۴\sqrt{۳}-۳}\right|=\left|\frac{۲\sqrt{۳}}{-۲}\right|=\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{۳}$$

با توجه به فرضیات مسئله به‌راحتی می‌توان نتیجه گرفت که دو مثلث EAB و EDC به حالت «ض‌زض» همنهشت هستند. در نتیجه مثلث EBC متساوی‌الساقین است (EB=EC) و بنابراین حکم ثابت و مثلث EBC متساوی‌الاضلاع است.

● **راه‌حل پنجم** با توجه به شکل ۵، طول EB را به‌دست می‌آوریم:

$$EB=\sqrt{(\frac{a}{۲}-۰)^۲+(\frac{a}{۲}\tan ۱۵-a)^۲}$$

$$=\sqrt{\frac{a^۲}{۴}+\frac{a^۲}{۴}(۲-\sqrt{۳}-۲)^۲}=\sqrt{\frac{a^۲}{۴}+\frac{۳a^۲}{۴}}=a$$

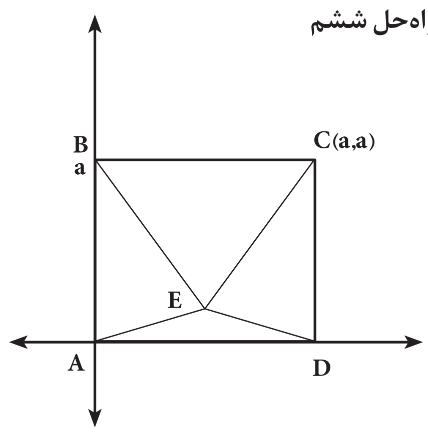
به‌همین ترتیب طول EC برابر است با:

$$EC=\sqrt{(\frac{a}{۲}-a)^۲+(\frac{a}{۲}\tan ۱۵-a)^۲}$$

$$=\sqrt{\frac{a^۲}{۴}+\frac{a^۲}{۴}(۲-\sqrt{۳}-۲)^۲}=\sqrt{\frac{a^۲}{۴}+\frac{۳a^۲}{۴}}=a$$

طول BC نیز برابر است با a. بنابراین حکم ثابت و مثلث EBC متساوی‌الاضلاع است.

● **راه‌حل ششم**



شکل ۶

با توجه به شکل ۶، معادلۀ دایره‌ای به مرکز $E(\frac{a}{۲},\frac{a}{۲}\tan ۱۵)$ و شعاع a برابر است با:

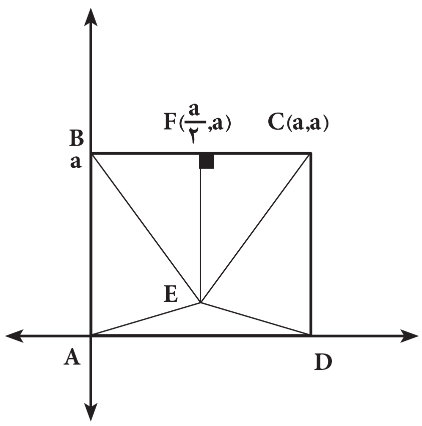
$$(x-\frac{a}{۲})^۲+(y-\frac{a}{۲}\tan ۱۵)^۲=a^۲$$

با توجه به اینکه $\tan ۱۵=۲-\sqrt{۳}$، در نتیجه معادلۀ دایره برابر است با:

$$(x-\frac{a}{۲})^۲+(y-a(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}))^۲=a^۲$$

به‌راحتی دیده می‌شود که مختصات نقاط B(۰,a) و C(a,a) در معادلۀ دایره صدق می‌کند در نتیجه EB=EC=a بنابراین حکم ثابت و مثلث EBC متساوی‌الاضلاع است.

● **راه‌حل هفتم**



شکل ۷

با توجه به فرضیات مسئله به‌راحتی می‌توان نتیجه گرفت که دو مثلث EAB و EDC به حالت «ض‌زض» همنهشت هستند (شکل ۷). در نتیجه مثلث EBC همچون مثلث EAD متساوی‌الساقین است. مختصات نقطۀ F وسط ضلع BC برابر است با: $F(\frac{a}{۲},a)$. بنابراین EF در مثلث EBC ارتفاع و طول آن برابر است با:

$$EF=\sqrt{(\frac{a}{۲}-\frac{a}{۲})^۲+(a-\frac{a(۲-\sqrt{۳})}{۲})^۲}$$

$$=\sqrt{\frac{۳a^۲}{۴}}=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

با توجه به فرمول مساحت مثلث (قاعده ضرب در نصف ارتفاع)، مساحت مثلث EBC برابر است با:

$$S_{EBC}=\frac{۱}{۲}EF\times BC=\frac{۱}{۲}\frac{a\sqrt{۳}}{۲}\times a=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$$

و چون در هر مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، مساحت برابر است با: $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$، بنابراین حکم ثابت و مثلث EBC متساوی‌الاضلاع است.

منابع

۱. پولیا، جورج (۱۳۸۵). *چگونه مسئله را حل کنیم*. ترجمه احمد آرام. انتشارات کیهان. تهران.
۲. بیگدلی، منیر (۱۳۸۷). «*یک مسئله و چند راه‌حل*». رشد برهان ریاضی دورۀ هیجدهم. شمارۀ ۱. صفحات ۶۱-۵۸.
۳. مکینتاش، رابرت (۱۳۹۱). «*آموزش حل مسئلۀ ریاضی*». ترجمۀ زهرا گویا. رشد آموزش ریاضی. شمارۀ ۸۷. تابستان. صفحات ۲۱-۳.

* m_k_nael@yahoo.com